

# Messung der Streckenlänge bei sportlichen Wanderungen

## 1.0 Wie genau ist genau?

Zu fast jeder öffentlichen Wanderung gibt es Diskussionen, wie genau die angegebene Streckenlänge stimmt. Besonders, wenn die 50 km-Strecke 55 km lang ist und der letzte Bus vom Ziel aus nicht mehr erreicht werden kann, gibt es Ärger. Aber auch, wenn eine Bestätigung über 100km gewünscht wird, die Strecke aber nur 90 km lang war.

Einige Veranstalter vertrauen ihrer Messung nicht und erhöhen die gemessenen Wanderstrecken noch um 10% - und haben so Ruhe vor Kritikern. Das ist aber keine Lösung des Problems, sondern der Veranstalter sollte wissen, wie man mit ausreichender Genauigkeit eine Streckenlänge ermittelt.

In welcher Größenordnung darf die Abweichung zwischen gemessener und wirklicher Streckenlänge sein?

- Mit 10% Abweichung kann man weder sicher planen, die Leistungsfähigkeit abschätzen noch Auszeichnungen für absolvierte Strecken (z.B. bei 10000 km fehlen 1000 km!) ausgeben.
- Abweichungen von 1% sind dagegen tolerierbar, z.B. bei einer 10km-Wanderung sind 100 m sicher unbedeutend, bei einer 100km-Wanderung fällt 1km kaum ins Gewicht.
- Eine Abweichung von maximal 0,1% wird in der Leichtathletik bei internationalen Langstreckenläufen gefordert. Das bedeutet einen immensen Aufwand wie spezielle genaue Kalibrierstrecken, Markierung der idealen Streckenlinie usw. (siehe [3]). Die unterschiedliche Wegbeschaffenheit, das Geländeprofil, Treppen usw. lassen bei Wanderwegen eine so hohe Genauigkeit gar nicht zu.

Daraus folgt, bei sportlichen Wanderungen sollten Abweichungen der Streckenlänge in der Größenordnung von 1% eingehalten werden.

Wie ermittelt man nun die "richtige" Streckenlänge? Bei der geforderten Genauigkeit kann die Länge nicht mehr durch Schätzung, sondern nur durch eine Messung ermittelt werden. Und Messungen sind entsprechend der DIN 1319, Grundlagen der Messtechnik, durchzuführen, um reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten.

Deshalb gilt es, auch für eine Streckenmessung, folgende Grundregeln einzuhalten:

- Einflüsse, die die Streckenmessung verfälschen können, sind zu untersuchen und gegebenenfalls bei der Ermittlung des Messergebnisses zu berücksichtigen. Das gilt auch für Messverfahren, bei denen eine Überprüfung der Messgenauigkeit nicht ohne weiteres möglich ist (z.B. Messung auf digitalen Karten).
- Das Messgerät muss ausreichend genau sein. Deshalb ist es zu kalibrieren, d.h. es ist eine genauere Strecke zu messen und das Ergebnis zu bewerten. Diese Kalibrierstrecke darf nur eine Abweichung von 0,1 bis 0,2-mal der gesuchten Genauigkeit besitzen. Man erhält damit die systematische Messabweichung und kann später die Messergebnisse mit einem daraus berechneten Korrekturfaktor  $k_s$  korrigieren.

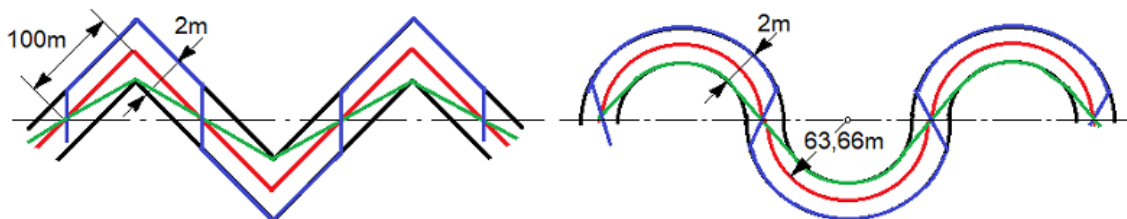
- Für die Ermittlung zufälliger Abweichungen bei der Messung ist diese mehrfach (zweckmäßig mindestens 3mal) zu wiederholen. Daraus ist (siehe nächster Punkt) die zufällige Messabweichung zu bestimmen.
- Mit den gewonnenen Messgrößen ist mit einem zweckmäßigen mathematischen Verfahren das vollständige Messergebnis zu ermitteln, d.h. bei der Streckenmessung der korrigierte Mittelwert und über die Standardabweichung der Vertrauensbereich des Mittelwertes.

Durch dieses Verfahren wird mit großer Sicherheit die Streckenlänge ermittelt.

Die nachfolgenden Abschnitte geben Hinweise zu Einflüssen auf die Streckenlänge, zur Kalibrierung der gängigen Messgeräte, zur Messung selbst und wie die Bestimmung des Messergebnisses am einfachsten erfolgen kann.

### 1.1 Einflüsse auf die Messung der Streckenlänge

Einflüsse auf die Streckenlänge haben vor allem die Art der Streckenlegung und die Geländestructur. Bei Läufen wird die optimale, kürzeste Strecke (siehe [3]) zugrunde gelegt. Diese Strecke wird auf dem Boden markiert und vermessen. Wanderer laufen demgegenüber in Kurven auch die längere Außenseite, queren die Straße, um einen Ausblick zu erreichen oder ein Denkmal zu betrachten. Um wie viel verlängert sich dabei die Strecke? Das kann man am besten mit Modellen berechnen. In Bild 1 sind Zickzack- und Bogenmodell gezeichnet. Die Rechnung ergibt, dass gegenüber der



**Bild 1** Zickzack- und Bogenmodell der Straßenführung

mittleren Wegführung (rot) die optimale Strecke (grün) etwa 1,5 % kürzer, demgegenüber die längere Strecke (blau) 1,5% größer ist.

Selbst wenn längere gerade Strecken vorhanden sind - für Läufer ist diese Abweichung zu groß, deshalb wird die kürzeste Strecke gekennzeichnet und gemessen. Wanderer nutzen nicht konsequent die kürzeste Strecke, sondern wechseln je nach Wegbeschaffenheit und Umfeld. Damit wird die mögliche Abweichung kleiner als 0,5%, deshalb kann die Messung für Wanderungen in der Mitte der Wege und Straßen erfolgen als Mittel zwischen maximaler und minimaler Länge der Strecke.

Anstiege erfordern eine wesentlich höhere Energie und Leistung als ebene Strecken. Deshalb dürfen auf gängigen Laufstrecken nur geringe Anstiege vorhanden sein, um eine Vergleichbarkeit mit anderen, ebenen und gleich langen Strecken zu gewährleisten.

Bei Wanderungen sind Anstiege kein Problem. Oft wird aber behauptet, dass durch Anstiege die Strecke bis zu 10% verlängert wird. Wie groß ist die Streckenverlängerung wirklich? Auch hier helfen mathematische Modelle, um diese Frage genauer zu klären.

Das einfachste Modell ist ein Dreieck, mit dem Satz von Pythagoras ist die Länge des Anstiegs leicht zu ermitteln. Steigt ein Weg auf 1km Länge um 100m an, ist

die Hypotenuse die richtige Strecke. Diese ist

$$L = \sqrt{(1\text{km})^2 + (0,1\text{km})^2} = 1.00499\text{km} ,$$

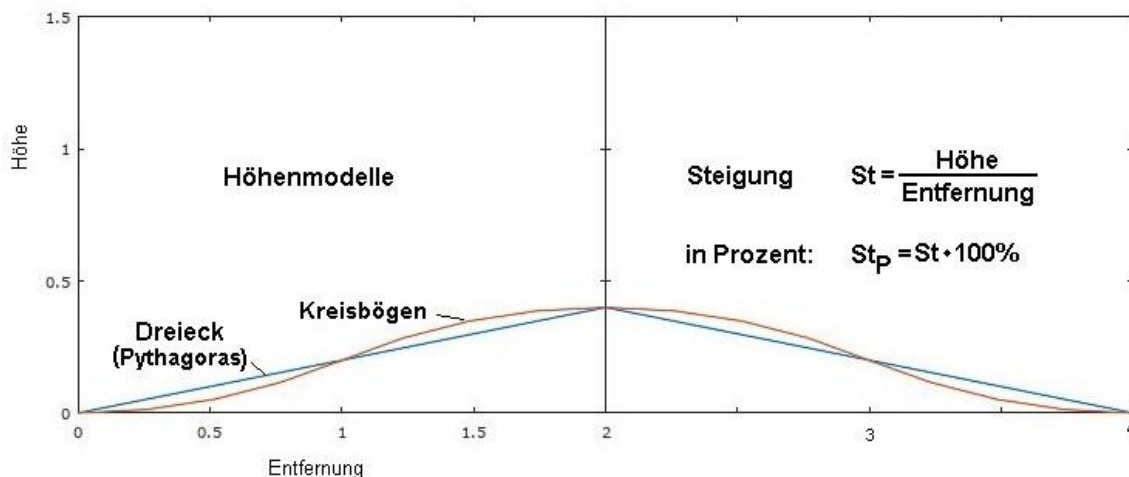
die Streckenverlängerung beträgt demnach 5m bzw. 0.5% für den Anstieg!

Im Mittelgebirge rechnet man bei einer Strecke von 10 km mit einem Anstieg von 130m. Nimmt man an, dass die Steigung 10% beträgt, ist die auf der Karte gemessene Steigungsstrecke 1,3 km lang. Die exakte Streckenlänge des Anstieges ist, berechnet mit dem Satz des Pythagoras,

$$L = \sqrt{(1,3\text{km})^2 + (0,13\text{km})^2} = \sqrt{1,69\text{km}^2 + 0,0169\text{km}^2} = 1,3065\text{km}.$$

Für den Anstieg ist die exakte Strecke 6,5m länger. Daraus folgt, An- und Abstieg zusammen ergeben eine Streckenverlängerung von 13 m, das sind 0,13% der Gesamtstrecke. Auch im Elbsandsteingebirge mit 300m Anstieg auf 10 km Strecke verlängert sich der Auf- und Abstieg nur um 30 m, um 0,3% der Gesamtstrecke. Selbst der Bergsteig auf den großen Winterberg im Elbsandsteingebirge, mit 17% Steigung ein fast alpiner Anstieg, ist in Wirklichkeit nur 36m (1,5%) länger als die auf der Karte ermittelte Streckenlänge von 2390m.

Man könnte einwenden, dass für einen Anstieg eine Gerade doch sehr einfach ist. Deshalb wird der Anstieg noch einmal mit Kreisbögen modelliert (siehe Bild 2).

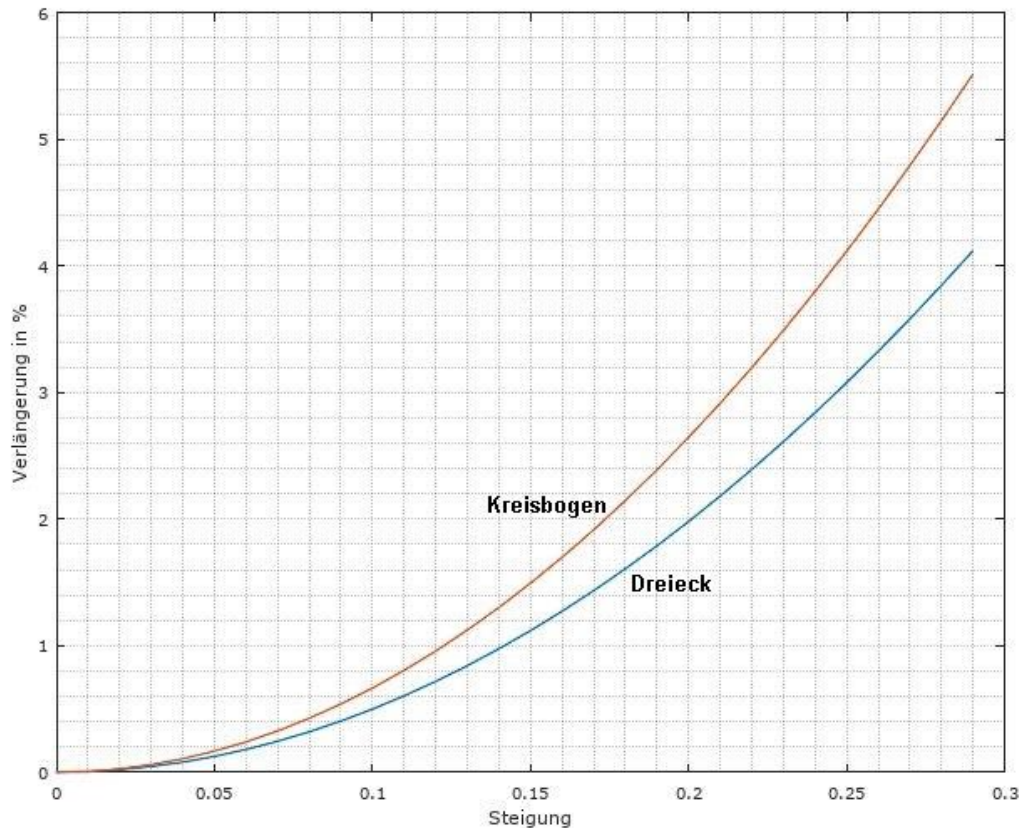


**Bild 2** Modelle für die Berechnung der Streckenverlängerung

Das Diagramm Bild 3 zeigt die Verlängerung in Prozent in Abhängigkeit von der Steigung für das Dreieck- und das Bogenmodell. Man erkennt, dass nur bei sehr steilen Anstiegen die Streckenverlängerung 1% übersteigt, für die gesamte Strecke bleibt sie unterhalb 0,5%, ein Zuschlag von 10% auf Grund der An- und Abstiege ist demnach falsch.

Bei Messungen der Streckenlänge auf Karten oder mit GPS-Geräten kann man die Streckenverlängerung durch An- oder Abstiege im Normalfall immer vernachlässigen, denn 10% steile An- und Abstiege sind doch selten.

Nur im steilen Mittelgebirge, z. B. im Elbsandsteingebirge, ist ein Zuschlag von 0,3% sinnvoll.



**Bild 3** Streckenverlängerung gegenüber der Ebene bei dreieckförmigen und bogenförmigen Anstiegen und Bodenwellen.

Wie stark beeinflussen Bodenwellen die Streckenlänge?

Für Bodenwellen wird das Modell aus Kreisbögen für die Berechnung der Streckenverlängerung verwendet (Bild 2). Bei kürzerer Folge der Bodenwellen werden diese einfach überschritten, ein Rollentfernungsmesser fährt aber die Kurve aus. Es wird deshalb eine längere Strecke gemessen. Günstiger ist hier ein Fahrrad, dessen größere Räder solche Unebenheiten besser ausgleichen.

Größere Bodenwellen müssen durchlaufen werden. Dabei steigt der Energiebedarf bei Steigungen von  $St=0,2$  auf das doppelte der ebenen Strecke, ähnlich einer Steigung von 10%. Für Laufveranstaltungen ist eine solche Strecke nicht vertretbar, Wanderer würden längere Strecken mit Bodenwellen im benachbarten Gelände umgehen. Je nach dem Verhältnis von Bodenwellenhöhe zur halben Wellenlänge kann die Streckenverlängerung aus dem Diagramm Bild 3 abgelesen werden. Da größere, tiefe Bodenwellen im Verhältnis zur Gesamtstrecke doch selten auftreten (maximal 10%), ist die resultierende Gesamtlänge sicher nicht mehr als 0,2% länger.

Weitere Einflüsse, wie Kartenfehler und Messung von Kurven durch eine Gerade, werden bei den betreffenden Abschnitten abgehandelt.

## 1.2 Kalibrieren von Messgeräten

Normalerweise fragt man nach dem Fehler der Messung. Der Fehler (Siehe Punkt 3.1) errechnet sich aus dem Messwert und dem wahren oder richtigen Wert. Letzteren kennen wir aber nicht! Wir können nur mit einem Messgerät oder einem Messverfahren, dessen Messabweichung zehnmal kleiner als die zulässige Abweichung ist, die Strecke ermitteln. Deshalb ist bei Wanderstrecken eine Messgenauigkeit von 0,1% des

Messgerätes bzw. des Messverfahrens notwendig. Die Messgeräte müssen deshalb an einer Strecke mit etwa 0,1% Abweichung vom Nennwert kalibriert werden (Siehe Punkt 3.5). Durch das Kalibrieren lassen sich systematische Fehler (z.B. Messrad zu klein, Spitzenabstand beim Stechzirkel zu groß) ermitteln und die Messergebnisse korrigieren (Siehe Punkt 3.2). Das gilt auch für Messräder und GPS-Geräte, eine große Anzahl angezeigter Stellen bedeutet nicht eine hohe Messgenauigkeit!

### 1.3 Verfahren zur Ermittlung des Messwertes

Ein weiterer Fehler entsteht durch Ungenauigkeiten bei der Messung, z.B. beim Anfangs- und Endpunkt der Strecke, an Kurven und Abzweigen, aber auch bei Messungen an Treppen, auf sandigem und unebenem Untergrund und durch Abweichungen vom idealen Streckenverlauf. Diese Fehler entstehen zufällig, man erhält deshalb bei jeder Messung der gleichen Strecke einen etwas anderen Wert. Da die Differenzen zwischen den Messwerten bis zu 1% betragen können- trotz der Gerätegenauigkeit von 0,1%! - ist für die Bestimmung des Messwertes ein statistisches Auswerteverfahren notwendig.

Mit mindestens 3 Messungen kann der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet und bei Vorgabe eines Vertrauensniveaus ein Vertrauensbereich bestimmt werden. Der Mittelwert ist als Näherung an den wahren Wert aufzufassen, der Vertrauensbereich gibt an, wie groß andere Messungen zufällig differieren können.

**Wichtig:** der systematische Fehler wird durch den zufälligen Fehler nicht erfasst! Diese Fehler sind nachträglich zu berücksichtigen.

Das Präsidium des SWBV hat festgelegt, dass der Vertrauensbereich der Angabe der Streckenlänge maximal 5% betragen darf. Bei einem Maximalwert ist ein Vertrauensniveau von 99% sinnvoll, sonst ist bei Wanderungen der Aufwand zu hoch. Andere Ausrichter nannten 3% als Fehler der Streckenlänge, das dafür notwendige Vertrauensniveau beträgt 95%. Die Festlegung des Maximalwertes von 5% ist bei 3 Messwerten strenger (Siehe Punkt 3.8).

Im folgenden Abschnitt 2 werden die üblichen Messverfahren zur Ermittlung der Streckenlänge auf der Karte und im Gelände untersucht.

Erläuterungen zu den Begriffen und Verfahren sind im Abschnitt 3 zusammengefasst. Abschließend sind in Abschnitt 4 die für die Ermittlung der Streckenlänge günstigsten Verfahren und notwendigen Schritte angegeben.

## 2. Messverfahren

### 2.1 Messungen auf der Karte

Wie groß sind allgemein die Abweichungen auf gedruckten Karten?

Für die mögliche Abweichung der Objekte auf amtlichen Karten werden maximal 0,4 mm angegeben, bei den üblichen Karten mit einem Maßstab von 1:25 000 ergibt das einen zufälligen Fehler von 0,133% bei einer Rundstrecke von 25km (Siehe Abschnitt 3.3, Kartenfehler).

Die durch die Generalisierung (Vereinfachung, z.B. durch Begradigung des Streckenverlaufs, vereinfachte Darstellungen von Einbindungen, Über- und Unterführungen) entstehende Streckenverkürzung sollte besonders bei kleinen Maßstäben Berücksichtigung finden. Die Messergebnisse sind deshalb mit dem Faktor  $k_G$  nach Tabelle 1 zu multiplizieren (Siehe Abschnitt 3.3). Deshalb sind zur Bestimmung der Streckenlänge Karten mit dem Maßstab 1:25 000 und größer zu bevorzugen. Das gilt auch für viele digitale Karten!

Kartenkopien sollten vor der Verwendung auf Verzerrungen geprüft werden, da Abweichungen des Maßstabes von 2% in der Längsrichtung der Kopie keine Seltenheit sind. Die zum Kopieren genutzte Originalkopie muss dann in der fehlerhaften Richtung, z.B. durch Vergrößerung unter Windows Paint, dem Fehler des Kopiergerätes angepasst werden.

Zur Vermeidung von systematischen Fehlern sind Messgeräte, wie Kurvimeter oder Stechzirkel, vor der Verwendung zu kalibrieren (siehe Abschnitt 3.5).

### 2.1.1 Kurvimeter

Vor der Messung ist das Kurvimeter zu kalibrieren und der Korrekturfaktor  $k_s$  zu bestimmen (siehe Abschnitt 3.5).

Für die Messung wird das Kurvimeter zuerst exakt auf Null gestellt und die geplante Strecke vom Start zum Ziel mit dem Kurvimeter abgerollt. Der Messwert ist zu notieren, das Kurvimeter wird wieder auf Null gestellt und die Messung in umgekehrter Richtung, vom Ziel zum Start, wiederholt. Selten sind beide Messwerte gleich, deshalb wird die Messung noch ein drittes mal wiederholt und aus diesen Werten der Mittelwert  $\bar{M}$  und die Standardabweichung  $s$  bestimmt. Mit dem Korrekturfaktor  $k_G$  ist der Generalisierungsfehler, mit  $k_s$  ist der systematische Fehler von  $\bar{M}$  und  $s$  zu korrigieren. Der Vertrauensbereich, innerhalb dem sich der Mittelwert befindet, wird aus der Standardabweichung  $s$  und dem Faktor  $k_v$  nach Tabelle 2 errechnet. Ist dieser Bereich zu groß, kann durch zusätzliche Messungen ein zuverlässigeres Ergebnis mit schmalere Vertrauensbereich gewonnen werden.

**Beispiel:** Wanderung durch den grünen Dresdener Norden:

Karte 1:25 000,  $k_G=1,01$ , Kurvimeterkorrektur  $k_s$ : 0,969

3 Messungen der Strecke: 14,8 km; 14,9 km; 15,1 km; d.h.  $n = 3$ ;  $k_v = 5,73$ .

Mittelwert: 14,933 km, mit  $k_s$  und  $k_G$  korrigiert 14,62 km

Streuung: 0,153 km, mit  $k_s$  und  $k_G$  korrigiert 0,149 km

Vertrauensbereich:  $s \cdot k_v = 0,149 \text{ km} \cdot 5,73 = 0,857 \text{ km}$ , das sind 5,9%, also zu groß.

Es sind deshalb zusätzliche Messungen notwendig:

2 zusätzliche Messungen: 15,2 km; 14,9 km; insgesamt  $n = 5$ ;  $k_v = 2,06$

Mittelwert: 14,98 km korrigiert 14,661 km

Streuung: 0,164 km korrigiert 0,161 km

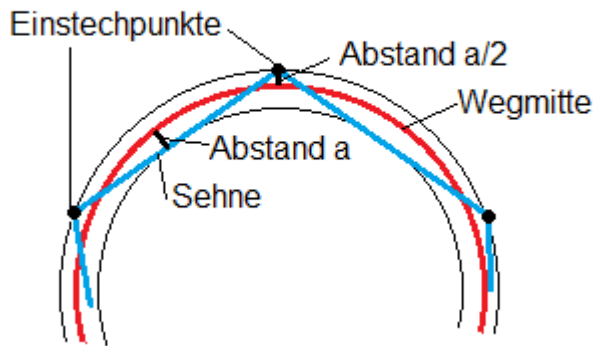
Vertrauensbereich:  $s \cdot k_v = 0,161 \text{ km} \cdot 2,06 = 0,331 \text{ km}$ , das sind 2,3%, zulässig

Ergebnis 14,66 km  $\pm$  0,33 km (VB =  $\pm$  2,3%)

### 2.1.2 Stechzirkel

Zweckmäßig stellt man den Stechzirkel mit der Stellschraube auf einen Spitzenabstand von exakt 1 cm ein. Da 0,1 mm Abweichung schon einen Fehler von 1% bedeutet, kalibriert man den Zirkel am besten an einer 10km-Strecke des UTM-Rasters (siehe Abschnitt 3.5).

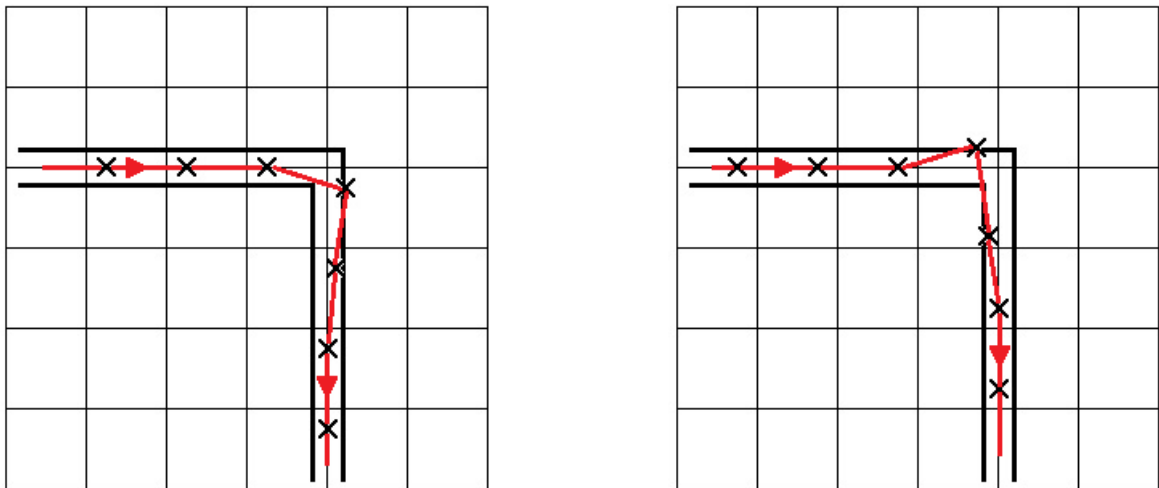
Die Messung erfolgt, ähnlich wie bei dem Kurvimeter, vom Start zum Ziel und umgekehrt. Zufällige Fehler entstehen weniger am Start- und Zielpunkt, sondern an Kurven und Abzweigen, werden doch gebogene Wegstücke durch Geraden ersetzt. Durch geschickte Wahl der Einstechpunkte ist aber die Abweichung sehr gering, mit Sicherheit kleiner als 0,5% für die gesamte Strecke.



**Bild 4** Wahl der Einstichpunkte beim Messen der Strecke mit dem Stechzirkel

Bei Kurven sollte der Einstichpunkt stets etwas außerhalb der Mitte des Weges gesetzt werden. Optimal ist ein Abstand des Einstichpunktes zur Mitte des Weges, der halb so groß ist wie der Abstand der Sehne (der Verbindungslinie von 2 Punkten) zur Mitte des Weges (Bild 4).

Bild 5 zeigt, wie an einem Abzweig, je nach dem, ob vor oder hinter dem Abzweig der nächste Einstichpunkt liegt, ein Längenausgleich erfolgen kann. Das Raster dient nur zur maßlichen Verdeutlichung. Reststrecken lassen sich schätzen oder mit einem Maßstab messen, zweckmäßig sollte die Messung in Zentimeter erfolgen und erst am Ende wird auf Kilometer umgerechnet.



**Bild 5** Längenausgleich an einem Abzweig bei Stechzirkelmessung

**Beispiel:**

Generalisierungskorrektur  $k_G=1,01$ , Stechzirkelkorrektur  $k_S: 1,008$

Messwerte: 57,5 cm; 58,0 cm; 57,3 cm, Anzahl  $n = 3$ , damit  $k_V = 5,73$

Mittelwert  $\bar{M}$ : 57,6 cm, korrigiert und umgerechnet: 14,66 km

Streuung  $s$ : 0,36 cm, korrigiert und umgerechnet 0,092 km

Vertrauensbereich:  $s \cdot k_V = 0,092 \text{ km} \cdot 5,73 = 0,53 \text{ km}$ , das sind 3,6%

Ergebnis: 14,66 km  $\pm$  0,53 km (VB =  $\pm 3,6$ )

### 2.1.3 Digitalisierte Karten

Digitalisierte Karten lassen sich meist bis zu sehr großen Maßstäben ( $>1:10\,000$ ) vergrößern, so dass eine Generalisierungskorrektur entbehrlich ist. Da die Strecke bei der Messung von Punkt zu Punkt durch gerade Strecken nachgebildet wird, sollte bei Kurven zur Vermeidung von Fehlern die Schrittweite verkürzt werden oder man setzt die Punkte außerhalb der Mittellinie, wie in Bild 4 dargestellt. Besonders einfach ist die Streckenmessung mit halbautomatischer Streckenführung (z.B. bei [milmeter.com](http://milmeter.com)), da bei einer seitlichen Abweichung automatisch auf der Mitte der vorgegebenen Wege gemessen wird.

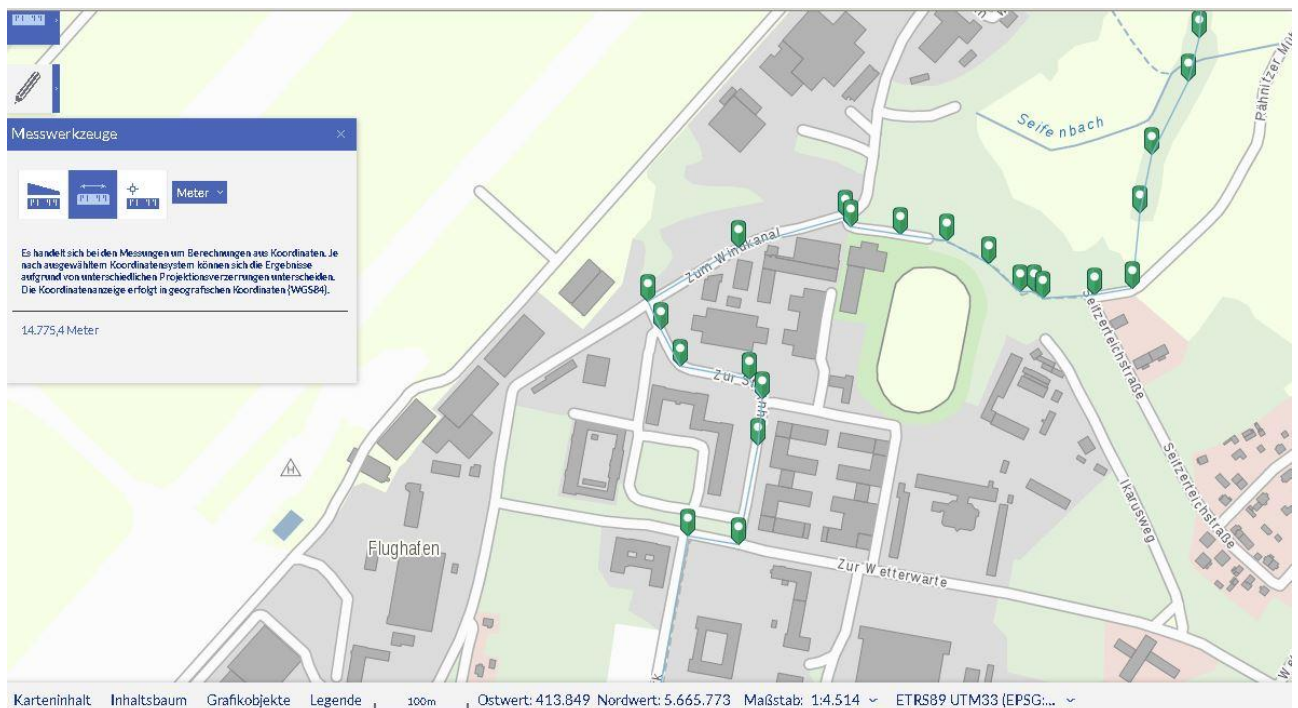
Neben (kostenpflichtigen) digitalen Karten auf CD, z.B. die CD-ROM Top50 Sachsen Version 5.0 / DVD-ROM TopMaps Sachsen Topografische Karte 1:25 000 gibt es eine Reihe kostenloser Programme im Internet.

#### 2.1.3.1 Karte im Geoportal Sachsen

Die Karte ist im Internet unter folgender Adresse verfügbar:

**[www.geoportal.sachsen.de/cps/karte.html?showmap=true](http://www.geoportal.sachsen.de/cps/karte.html?showmap=true)**

Mit den beigegebenen Werkzeugen kann sehr einfach die Streckenlänge gemessen werden. Die Auflösung von 10 cm macht eine Kalibrierung entbehrlich, allerdings sind die zufälligen Fehler beim Setzen der einzelnen Punkte doch wesentlich größer, so dass auch hier eine mehrfache Messung notwendig ist, um zufällige Fehler auszugleichen.



**Bild 6** Streckenmessung auf der Geoportalkarte

**Beispiel:** Wanderung durch den grünen Dresdener Norden

Messwerte: 14,7724 km; 14,6786 km; 4,7534 km;  $n = 3$  damit  $k_v = 5,73$

Mittelwert: 14,735 km

Standardabweichung  $s$ : 0,0496 km



Vertrauensbereich: 0,0496 km-5,73 = 0,284 km; das sind 1,928 %

Ergebnis: 14,74 km  $\pm$  0,28 km (VB =  $\pm$  1,93%)

### 2.1.3.2 Milermeter

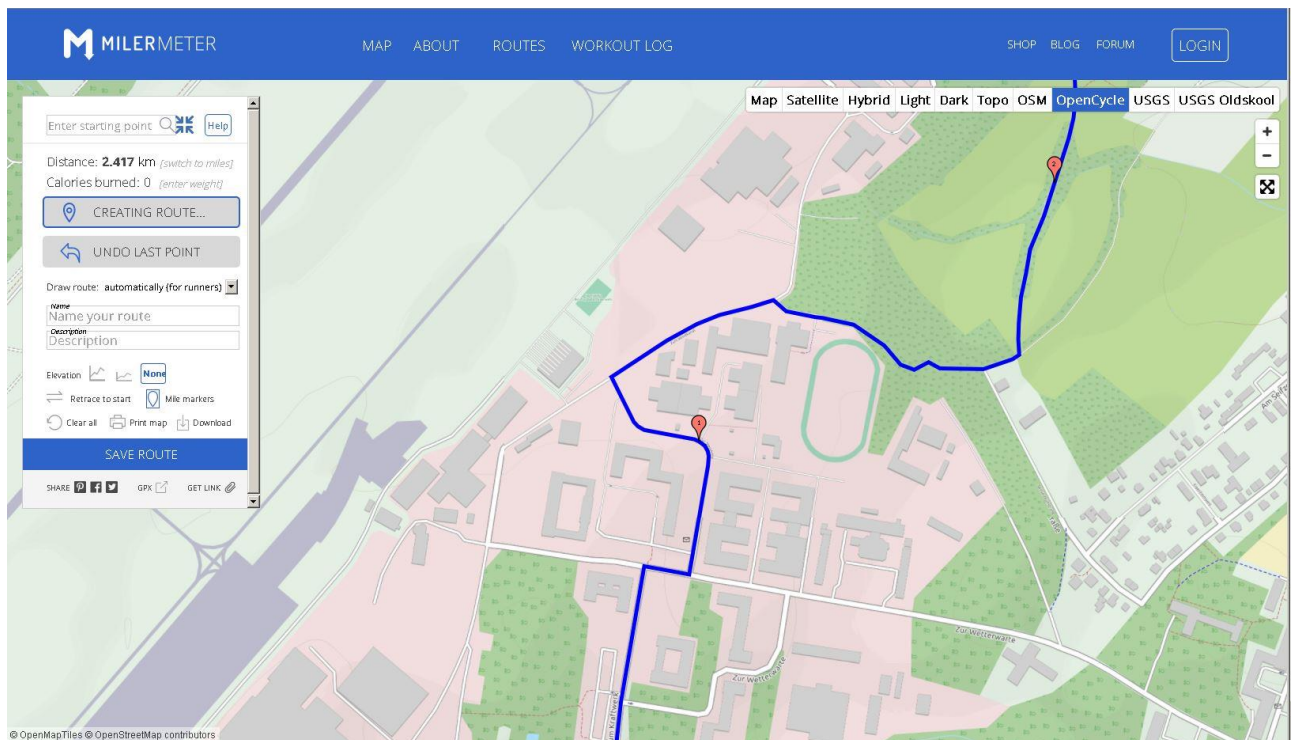
Entworfen zur genauen Messung der Streckenlänge für Läufer, Wanderer und Radfahrer, aus dem Internet ladbar unter **milermeter.com** oder **gmap-pedometer.com** und anderen Bezeichnungen.

Wichtig: Werbung blockieren, da sonst die Arbeit behindert wird.

Bei diesem Programm wird die Strecke auf 0,1m genau ausgemessen. Im automatischen Modus wird die Strecke in der Mitte der vorgegebenen Wege geführt. Die Abweichungen zwischen einzelnen Messungen sind deshalb sehr klein. Bei einem nicht eingezeichneten Wegstück kann für diese Strecke auf manuellen Betrieb umgeschaltet werden, da sonst die Strecke auf vorgegebene Wege umgeleitet und entsprechend gemessen wird.

Durch dieses Verfahren sind die zufälligen Abweichungen sehr klein, Fehler können nur an Abzweigen entstehen, wenn dort der Punkt nicht exakt auf den Wegknick gesetzt wird. Deshalb sollte der Punkt großzügig auf den Weg hinter dem Knick gesetzt werden, das System findet die richtige Abzweigung selbstständig.

Für die Kartendarstellung gibt es verschiedene Möglichkeiten: Open Cycle, Hybrid oder Map, je nach Wunsch. Eine Markierung der vollen Kilometer ist möglich, auch das Löschen des letzten eingegebenen Streckenteils.



**Bild 7** Messung mit dem Milermeter

Meßergebnisse: 14,7853km 4,7951km 14,7948km  
 Mittelwert Mw=14,7917km  
 Standardabweichung s=0,00557km  
 Vertrauensbereich s·kv=0,0319km d.h. 0,22%

Ergebnis: 14,79 km  $\pm$  0,032 km (VB =  $\pm$  0,22%)

### 2.1.3.3 NOPs' Reit- und Wanderkarte

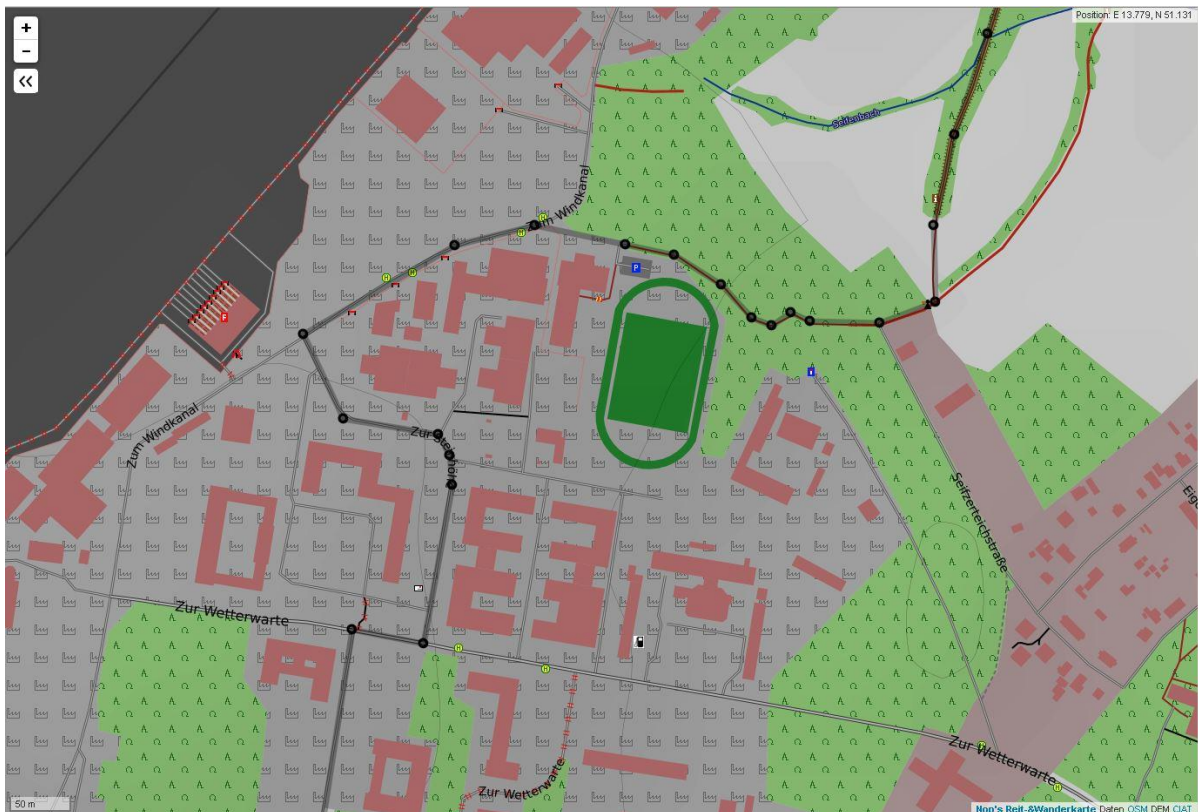
Diese Karte kann unter

**wanderreitkarte.de** oder über **openstreetmap.de**

aus dem Internet genutzt werden. Sie zeigt den Wegebelaag und die Markierung der Strecke. Durch Verschieben der einzelnen Stützpunkte kann die Strecke nachträglich korrigiert und optimiert werden. Die Genauigkeit ist ebenfalls ausreichend (auf 10m genau). Möglich ist auch die Berechnung der steigenden Meter und Ausgabe des Höhendiagramms für die gemessene Strecke.

Meßergebnisse: 14,78km 14,71km 14,79km  
 Mittelwert 14,76km  
 Standardabweichung  $s=0,0436\text{km}$   
 Vertrauensbereich:  $s\text{-kv}=0,250\text{km}$  d.h. 1,7%

Ergebnis: 14,76 km  $\pm$  0,25 km (VB =  $\pm$  1,7%)



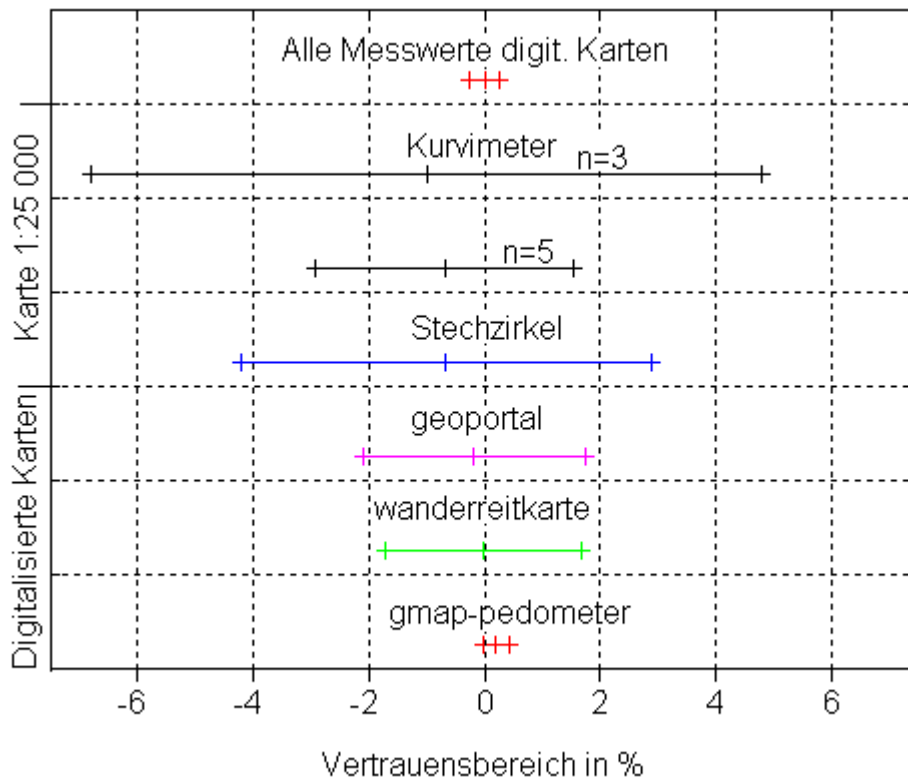
**Bild 8** Messung mit der Reit- und Wanderkarte

### 2.1.4 Vergleich der Karten- Messverfahren

Der Vergleich erfolgt an einer Wanderstrecke im Dresdner Norden. Die Grenze des Vertrauensbereiches von 5% wird nur beim Kurvimeter bei drei Messungen überschritten, nach zwei zusätzlichen Messungen jedoch eingehalten. Die kleinste Längendifferenz, die man auf der Karte 1:25 000 unterscheiden kann, beträgt beim Kurvimeter 50 m, bedingt durch die relativ kurze Skalenlänge des Gerätes. Deshalb sind auf kürzeren Strecken (< 20km) mehr als 3 Messungen notwendig. Beim Stechzirkel können noch 2,5 m unterschieden werden.

Bei Messungen auf digitalen Karten werden zum Teil noch 0,1 m ausgegeben. Diese hohe Genauigkeit ist aber für Wanderstrecken sinnlos, da die zufälligen Fehler wesentlich größer sind.

Vergleicht man die Standardabweichung der Verfahren, so besitzen sie fast die gleiche Größenordnung. Der wesentliche Anteil am Messfehler ist demnach zufällig und kann auch mit einem sehr genauen Messverfahren nicht verbessert werden. Im Bild 7 sind die Vertrauensbereiche gezeichnet, berechnet für ein Vertrauensniveau von 99%. Der sehr kleine Vertrauensbereich, der mit dem Milermeter unter gmap-pedometer.de erreicht wird, kommt durch die automatische Streckenführung in der Mitte des Weges zustande. Die optimale Streckenführung der Läufer würde eine etwa 0,2% kürzere Strecke ergeben, deshalb ist für die Leichtathletik dieses Verfahren nicht verwendbar, ein Wanderer wird öfter die Wegseite wechseln und weniger auf eine optimale Streckenführung achten. Deshalb kann seine gelaufene Strecke bis zu 0,5% länger sein. Ein guter Kompromiss ist deshalb, die Strecke in der Mitte des Weges zu führen und zu messen.



**Bild 7** Vertrauensbereiche der Karten- Messverfahren

## 2.2. Messung im Gelände

Messungen im Gelände werden oft den Messungen auf der Karte vorgezogen. Das ist bei Leichtathletik-Veranstaltungen berechtigt, da dort ein Fehler von 0,1% eingehalten werden muss. Der Aufwand dafür ist beträchtlich. Die Strecke ist entlang einer idealen Linie zu messen, als Messgerät wird ein Fahrrad mit einem speziellen Zähler, dem Jones- Counter, genutzt. Die Kalibrierung des Zählers erfolgt mit einem Stahlbandmaß unter Berücksichtigung der Temperatur und der Zugkraft (siehe [3]). Durch mehrfache Messung werden zufällige Fehler erkannt.

Beim sportlichen Wandern ist eine so hohe Genauigkeit nicht notwendig und auch nicht erreichbar. Fehler an Anstiegen sind gegenüber den zufälligen Fehlern an Kurven, Abbiegungen und kleinen Umwegen zu vernachlässigen bzw. können pauschal

berücksichtigt werden. Die zufälligen Fehler erfordern jedoch eine mehrfache Messung, die gegenüber der Messung auf der Karte wesentlich aufwendiger ist.

### **2.2.1 Messrad.**

Für Streckenmessungen im Gelände ist ein Messrad (Hodometer, Rollentfernungsmesser) einsetzbar. Teure Geräte können ebene Beton- oder Asphaltstrecken bis auf 0,05% genau messen, sind zum Teil auch amtlich kalibrierbar, nur kann man bei Wanderstrecken mit Pflaster, Grasnarbe, Sand und Stufen diese Genauigkeit nicht nutzen.

Einfachere Geräte (Rad-Durchmesser 31,8 cm) können auch im wechselnden Gelände genutzt werden und messen auf 0,2...1% genau (Preis: etwa 80 EUR). Auch bei diesen Geräten sollte eine Kalibrierung an einer genau bekannten Strecke erfolgen. Die Anzeige erfolgt meist mit 5 Stellen, d.h. 9999,9m werden angezeigt. Man kann damit 10m auf 1% genau bestimmen- aber nicht 10km auf 0,1m genau, denn das wäre ein Fehler von 0,001%.

Die Strecke ist, genau wie bei der Messung auf der Karte, mindestens 3-mal zu messen, um zufällige Fehler zu bestimmen.

### **2.2.2 Messungen mit dem Jones- Counter am Fahrrad**

Durch Nutzung des Jones- Counter, einem speziellen Zähler, der am Vorderrad eines Fahrrades befestigt wird, kann nach exakter Kalibrierung an einer mit einem Stahlmaßband gemessenen 300 bis 1000 m langen Strecke eine Wettkampfstrecke auf 0,1% genau gemessen werden (Mehrfache Messung, Temperatenausgleich, siehe Handbuch für den DSL- Streckenvermesser [3]). Diese Genauigkeit ist beim Wandern nicht erforderlich. Eine Kalibrierung ist jedoch unumgänglich, da der Zähler nur Impulse pro Strecke anzeigt. Erhältlich ist der Zähler über den Deutschen Leichtathletik-Verband, deshalb können dort auch die vorhandenen Kalibrierstrecken erfragt und genutzt werden. Zufällige Fehler, die an Kurven, Abbiegungen, an Pfaden, Reitwegen und durch Schiefstellung des Vorderrades entstehen können, sind durch mehrfache Messung zu bestimmen.

Gegenüber dem Messrad vermindert der größere Raddurchmesser Fehler auf unebener Strecke.

### **2.2.3 Fahrradtachometer**

Auch mit einem Fahrradtachometer kann die Strecke ausgemessen werden. Allerdings sind die Toleranzen gegenüber dem Messrad und dem Jones- Counter wesentlich größer. Oft wird nur ein Impuls pro Radumdrehung ausgewertet, beim Jones- Counter dagegen 10...20 Impulse. Das Fahrradtachometer ist deshalb an einer auf 0,1% genau bekannten, etwa 1km langen Strecke zu kalibrieren. Günstig ist die Verwendung von pannensicheren Reifen, um Änderungen des Reifenluftdrucks zu vermeiden.

Die zufälligen Fehler sind wie beim Jones- Counter durch mehrmaliges Durchfahren der Strecke zu ermitteln.

### **2.2.4 Sonstige Messverfahren**

#### **Schrittzähler**

Die Schrittlänge ist Grundlage für die Streckenbestimmung. Da die Schrittlänge sehr stark vom Geländeprofil, der Wandergeschwindigkeit, dem Wegzustand und der Leistungsfähigkeit abhängig ist, muss mit einem Fehler von 10% gerechnet werden, der auch durch Justierung der mittleren Schrittlänge nicht unter 5% Fehler zu bringen ist.

Zufällige Fehler vergrößern den Gesamtfehler - doch wer möchte die zu bestimmende Strecke mehrfach ablaufen!

### Zeitmessung

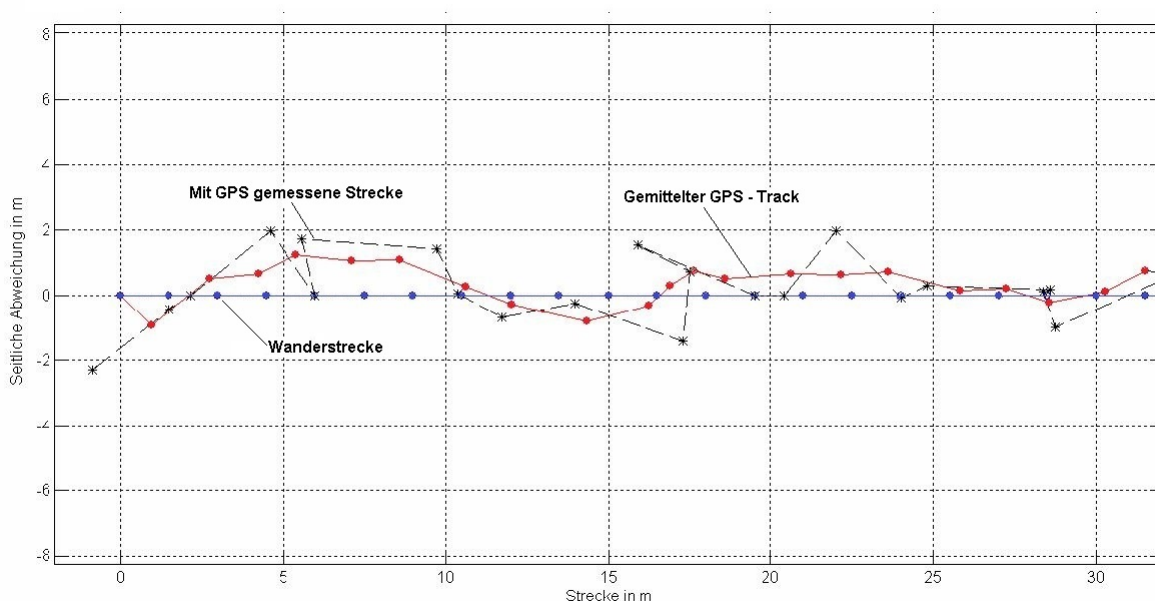
Rhythmische Gehweise ergibt eine Wandergeschwindigkeit von 6km/h. Geländeprofil, Wegezustand und Leistungsfähigkeit verändern jedoch die Wandergeschwindigkeit. Damit ist die Zeit keine verlässliche Messgröße für größere Streckenlängen.

### GPS-System.

Regelmäßig berichten Sportfreunde, dass sie mit ihrem GPS-Gerät wesentlich längere Strecken gemessen hätten. Nun, beim GPS - Verfahren wagt ja keiner das Ergebnis anzuzweifeln. Wird doch in der Literatur berichtet, dass es moderne Geräte mit einer Genauigkeit von 10cm und genauer gibt [4].

Leider wird übersehen, dass diese Messgeräte eine wesentlich größere Antenne besitzen (beim DGPS auch mehrere Antennen) und stationär betrieben werden. Die Dauer einer Messung kann bis zu einer Stunde betragen- und das Messgerät ist unter 10 000 Euro kaum zu haben.

Kleine, handliche und preiswerte Geräte haben gegenüber diesen kommerziellen Geräten wesentlich kleinere Antennen und eine einfache Auswertung zur Ermittlung des Standpunktes. Unter guten Bedingungen beträgt der mittlere Fehler der Positionsbestimmung 2 m. Mit einigen Mittelklassegeräten (>500Euro) kann bei ausreichender Geschwindigkeit auch die zurückgelegte Strecke gemessen werden. Einfachere kleine Geräte bieten meist die Trackverfolgung an, bei der die zurückgelegte Strecke in eine Karte übertragen oder zum Ausgangspunkt zurückgefunden werden kann. Die Streckenangabe dient hier nur zur Information, wie lang es etwa bis zum Ausgangspunkt ist. Die Bestimmung dieser Strecke erfolgt durch Auswertung der Positionsverschiebung, auch Trackverfolgung genannt. Dabei wird von Messpunkt zu Messpunkt die Entfernung ermittelt. Wird jede Sekunde gemessen, legt man in dieser Zeit 1,5m zurück. Die üblichen Streuungen bei diesen Geräten betragen aber 3m - aufgezeichnet ergibt das eine Zickzacklinie, auch Kreise sind möglich. Die zufälligen seitlichen Abweichungen addieren sich zur Fortbewegungsstrecke, sie wird dadurch länger. Bild 10 zeigt den Grund.



**Bild 10** Treckingspur eines einfachen GPS-Gerätes

Die blaue Linie ist die Wanderstrecke, an den blauen Punkten wird gemessen. Die schwarzen Sterne sind die Messergebnisse. Die gestrichelte Linie wäre viel zu lang, deshalb wird durch Mittelung über drei Messungen die Messkurve geglättet (rote Kurve), die Streckenmessung ergibt nun nur noch 12% größere Werte - also genau den Betrag, der bei Veranstaltungen immer als Fehler genannt wird.

Messungen des DLV ergaben, dass unterhalb einer Bewegungsgeschwindigkeit von 20km/h die Fehler größer als 5% sind, sie können bei 6km/h durchaus auch 30% betragen. Deshalb sind diese Geräte auch nicht kalibrierbar- und deshalb wird der Messfehler bei Handgeräten mit Trackverfolgung auch nie angegeben.

Ein anderes Verfahren fußt auf der Auswertung der Doppler- Frequenzverschiebung zur Messung der Geschwindigkeit. Für diese Geräte wird der Fehler der Geschwindigkeitsmessung angegeben, er beträgt unter guten Bedingungen 0,2km/h. Bei 5km/h Wandergeschwindigkeit sind das aber 4% im offenen Gelände, im Wald wächst der Fehler rasch auf 8...12%. Das gilt auch bei der Bestimmung der Streckenlänge!

Das bedeutet, die Entfernungsbestimmung mit **einfachen** GPS-Geräten ist auf Grund der geringen Fortbewegungsgeschwindigkeit wesentlich ungenauer als die Messung auf der Karte oder mit Messrädern im Gelände und kann deshalb zur Messung der Streckenlänge **nicht** verwendet werden.

**Weiterentwickelte neuere Geräte** nutzen digitale Karten, um die GPS- Messpunkte auf die Wegstrecke zurückzuführen, ähnlich dem Messverfahren mit dem Milermeter (Siehe Punkt 2.1.3.2) Zufällige Fehler treten vor allem an Wegabzweigungen auf, deshalb muss die Strecke doch mehrfach abgelaufen werden, wenn man die zusätzlichen Messungen nicht gleich mit dem Milermeter erledigt.

### 3. Erläuterungen

#### 3.1 Fehler

Ein Fehler F berechnet sich aus der Differenz von Messwert M minus richtigen Wert R,

$$F = M - R$$

Der relative Fehler  $F_r$  ist dann

$$F_r = \frac{F}{R} = \frac{M-R}{R} = \frac{M}{R} - 1$$

und der prozentuale Fehler

$$F_p = F_r \cdot 100\%$$

#### 3.2 Systematische und zufällige Fehler

Der Fehler kann durch die Messeinrichtung bestimmt sein (Maßband zu lang, Messrad zu klein, falsch justiert). Man erhält eine „Systematische Abweichung“ mit einem konstanten Betrag und einem bestimmten Vorzeichen. Diesen Fehler kann man berücksichtigen und erhält einen „Berichtigten Messwert“  $M_B$ .

Man rechnet

$$M_B = \frac{M}{1 + \frac{F_p}{100}} = \frac{M}{1 + F_r} = M \cdot k_s \quad \text{mit } k_s \frac{1}{1 + F_r} = \frac{R}{M}$$

Andere Einflussgrößen, z. B. die Temperatur, können ebenfalls einen Fehler verursachen. Dieser ist entweder systematisch und kann durch Kalibrieren bestimmt und berücksichtigt werden oder der Fehler besitzt eine wechselnde Größe, z. B. Fehler beim Aufsetzen und Abheben eines Kurvimeters. Letzterer wird durch statistische

Methoden (siehe Mittelwertbildung, Standardabweichung und Vertrauensbereich, Punkt 3.6 und 3.7) erfasst.

### 3.3 Kartenfehler, Generalisierungsfehler

Für die mögliche Abweichung der Objekte auf amtlichen Karten werden maximal 0,4 mm angegeben, bei den üblichen Karten mit einem Maßstab von 1:25 000 sind das maximal 10m, im Durchschnitt 3,33m. Bei einer Messlänge von 250m und 100 Messpunkten ergibt das eine Abweichung von 33m, d.h. 0,133% bei einer Rundstrecke von 25km.

Beim Druck von Karten mit kleinem Maßstab (Maßstabszahl >25 000) gehen viele Feinheiten im Streckenverlauf verloren. Wird direkt auf der Karte gemessen, kann die Verkürzung der Strecke durch einen Faktor  $k_G$  berücksichtigt werden, wenn die Strecke kurvenreich ist. Werte für  $k_G$  sind in Tabelle 1 aufgeführt, diese Werte sind nur als Anhaltspunkt aufzufassen. Werden vorwiegend gerade Strecken zurückgelegt, können die Abweichungen kleiner sein, bei sehr kurvenreicher Strecke auch größer.

**Tabelle 1** Korrekturfaktoren für die Kartengeneralisierung

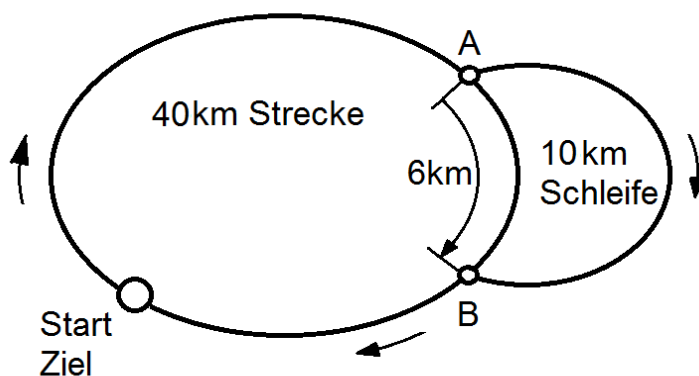
Maßstab	Korrekturfaktor $k_G$	In Prozent
1:100 000	1,1	10%
1:50 000	1,03	3%
1:25 000	1,01	1%
1:12 500	1,003	0,3%
1:5 000	1,001	0,1%

Einfache Wanderkarten zeigen oft weniger Einzelheiten, dort muss man bei einem Maßstab von 1:30 000 mit einem Fehler von 3% rechnen.

### 3.4 Logische Fehler

Diese Fehler sind eine Besonderheit bei Wanderveranstaltungen mit mehreren Strecken. Sie entstehen durch falsche Streckenzuordnung und sind messtechnisch nur durch konsequentes Ausmessen der Gesamtstrecke herauszufinden.

Beispiel: An eine 40 km-Strecke wird noch eine ganz genau gemessene 10 km lange Schleife angefügt (Bild 11), um für 100km-Wanderer eine 50km-Tag- und



**Bild 11** Falsche Ergänzung einer 40 km - Strecke zur 50 km – Strecke

Nachtschleife zu bekommen. Durch die zwischen A und B nicht durchlaufene 6 km Strecke legen die 50km- Wanderer aber nur 44km und die 100km- Wanderer nur 88km zurück.

### 3.5 Kalibrieren

Durch Vergleich mit einem genauen Maßstab kann man den systematischen Fehler bestimmen. Genau bedeutet, dass der Fehler des Vergleichsnormals höchstens 10% vom zulässigen Fehler sein darf. Stahlmaßstäbe für Karten, Stahlbandmaße für Messstrecken in der Natur sind hierfür geeignet (Fehler 0,1...0,2% bei 95% Vertrauensbereich). Auf der Karte bietet sich als genaues Maß das UTM- Gitter an, ein Gitterquadrat ist bei der 1:25 000 -Karte 1km x 1km groß. Auch am Kartenrand sind Angaben in Gauß-Krüger- oder UTM- Koordinaten nutzbar. Weiterhin können Angaben der geographischen Breite verwendet werden, eine Breitenminute ist 1,85227km lang. Die Länge der Kalibrierstrecke sollte mindestens 40 cm betragen, günstiger sind 80 cm, das entspricht auf der 1:25 000-Karte 10 bzw. 20 km. Der aufgedruckte, meist 10 cm lange Maßstab ist dagegen zu kurz. Fehlen längere Kalibrierkoordinaten, muss eine 40cm lange Strecke auf dem Kartenrand aufgezeichnet und mit einem Stahlmaßstab kontrolliert werden.

In der Natur kann man eine Kalibrierstrecke mit einem Stahlbandmaß ausmessen. Die Strecke sollte etwa 1000mal länger sein als das Auflösungsvermögen des Meßsystems beträgt, z.B. beim Jonas-Counter 200m, beim Fahrradachometer 2000m. Wesentlich einfacher ist es, die Kalibrierstrecken des Deutschen Leichtathletik-Verbandes zu nutzen.

#### Beispiel Kalibrierung Kurvimeter:

Zufällige Fehler treten vor allem durch Schrägstellung des Kurvimeters beim Aufsetzen und Abheben sowie beim Ablesen auf. Die Kalibrierstrecke sollte so lang sein, dass der Zeiger beim mechanischen Kurvimeter möglichst eine Umdrehung ausführt, beim elektronischen Kurvimeter sollten 4 Stellen angezeigt werden.

Messwerte in km:

20,70; 20,65; 20,75; 20,60; 20,70; 20,60; 20,65; 20,65; 20,60; 20,50.

Mittelwert: 20,64 km;  $s = 0,07$  km;  $k_s = \frac{20,00\text{km}}{20,64\text{km}} = 0,969$

#### Beispiel Kalibrierung Stechzirkel:

Der Stechzirkel (mit Einstellschraube) wird zweckmäßig auf 1 cm eingestellt. Das entspricht 250m in der Natur. Als Kalibrierstrecke bietet sich das UTM-Gitter moderner Karten an, die Länge sollte mindestens 10 km betragen. Man zählt die Zirkelschläge bis kurz vor dem Endpunkt der Kalibrierstrecke und misst die Restlänge in cm mit einem (Stahl-) Maßstab. Beide Werte sind zu addieren. Eine Umrechnung auf Meter ist nicht notwendig, da der Korrekturfaktor  $k_s$  dimensionslos ist.

Messwerte in cm: 39,7; 39,8; 39,6; 39,7; 39,5; 39,7  $n=6$

Mittelwert: 39,666cm;  $s = 0,103\text{cm}$ ;  $k_s = \frac{40\text{cm}}{39,67\text{cm}} = 1,0084$

### 3.6 Mittelwert und Standardabweichung

Aus mehreren, sich zufällig und geringfügig unterscheidenden Messwerten kann ein Mittelwert  $\bar{M}$  gebildet werden, der sich dem richtigen Wert annähert. Dazu addiert man



die Einzelmesswerte und teilt die Gesamtsumme durch die Anzahl der Messwerte.

Als Formel:

$$\bar{M} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n}$$

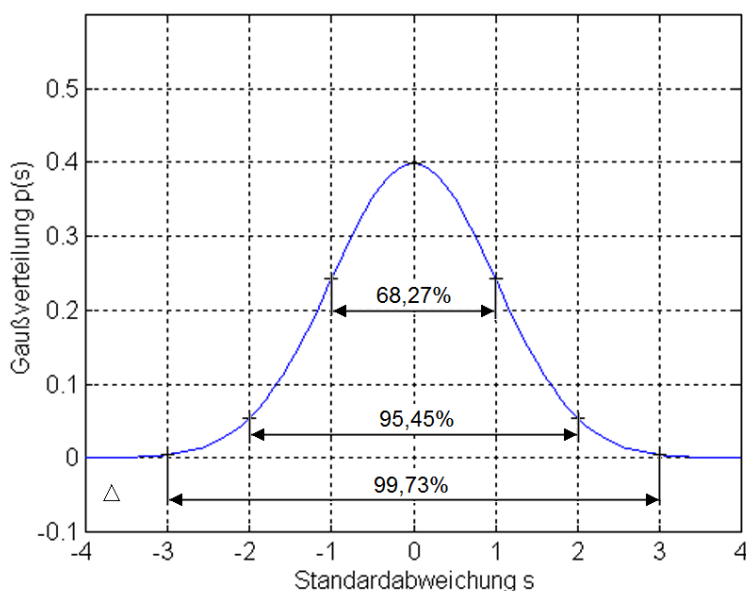
Die Standardabweichung  $s_{n-1}$  kann man aus der Summe der quadrierten Differenzen von Messwert und Mittelwert ermitteln. Diese Summe wird durch die Anzahl der Messwerte  $n$ , vermindert um eins, geteilt und daraus die Wurzel gezogen. Als Formel geschrieben:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}{n-1}}$$

Für die Berechnung nutzt man zweckmäßig einen Wissenschaftlichen Taschenrechner oder andere Hilfsmittel (siehe Anhang 3).

Bei einer großen Anzahl einzelner Messwerte ( $n > 200$ ) kann man die Anzahl der Messwerte, die einer bestimmten Größe zugeordnet werden können (Häufigkeit), in ein Diagramm eintragen. Normiert man dieses so, dass der Mittelwert zu 0 wird, erhält man eine glockenförmige Kurve (siehe Bild 12) Der Abstand der Kurvenpunkte von der Mittellinie, bei der die Kurve wieder flacher verläuft (Wendepunkte) entspricht der Standardabweichung  $s$  bzw.  $\sigma$  bei sehr großer Messwertanzahl.

Zwischen  $+s$  und  $-s$  befinden sich 68,27% aller Messwerte, zwischen  $+2s$  und  $-2s$  sind es 95,45% und zwischen  $+3s$  und  $-3s$  fast alle Werte, exakt 99,73%. In der Technik gibt man die Genauigkeit mit 95% Wahrscheinlichkeit an, z.B. die Genauigkeit von Stahlmaßstäben.



**Bild 12** Normierte Gaußverteilung

### 3.7 Vertrauensbereich

Auch mit einem sehr genauen Messgerät unterscheiden sich die Ergebnisse mehrerer Messungen. Deshalb ist durch mehrfache Messung die Streuung der Werte zu bestimmen. Bei wenigen Werten (zweckmäßig mindestens 3) kann ein Vertrauensbereich bestimmt werden, innerhalb dem sich der Mittelwert mit einer

bestimmten Wahrscheinlichkeit befindet. Bei einem vorgegebenen maximalen Fehler wählt man ein Vertrauensniveau von 99% oder 99,9%. Für Wanderungen genügen 99%, da sonst der Aufwand für die Messungen zu groß wird.

Aus den Messungen bestimmt man den Mittelwert und die Standardabweichung  $s_{n-1}$ . Der Vertrauensbereich, innerhalb dem sich der Mittelwert befinden kann, erhält man durch Multiplikation der Standardabweichung mit dem Faktor  $k_v$  aus Tabelle 2.

**Tabelle 2** Korrekturfaktoren  $k_v$  für die Berechnung des Vertrauensbereiches bei einem Vertrauensniveau von 99% (Maximalwerte bei Wanderungen)

Anzahl der Messwerte n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
Korrekturfaktor $k_v$	45,01	5,73	2,91	2,06	1,64	1,40	1,24	1,12	1,03	0,90

Bei technischen Messungen, z.B. bei der Angabe von Toleranzen bei Stahlmaßstäben, wählt man ein Vertrauensniveau von 95%. Für diesen Fall ergeben sich die Korrekturfaktoren  $k_{vT}$  aus Tabelle 3

**Tabelle 3** Korrekturfaktoren  $k_{vT}$  für die Berechnung des Vertrauensbereiches bei einem Vertrauensniveau von 95% (Werte für technische Messungen)

Anzahl der Messwerte n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
Korrekturfaktor $k_{vT}$	8,99	2,48	1,59	1,24	1,05	0,93	0,83	0,77	0,71	0,64

Das folgende Beispiel soll die Begriffe Vertrauensbereich, Mittelwert und Streuung verdeutlichen.

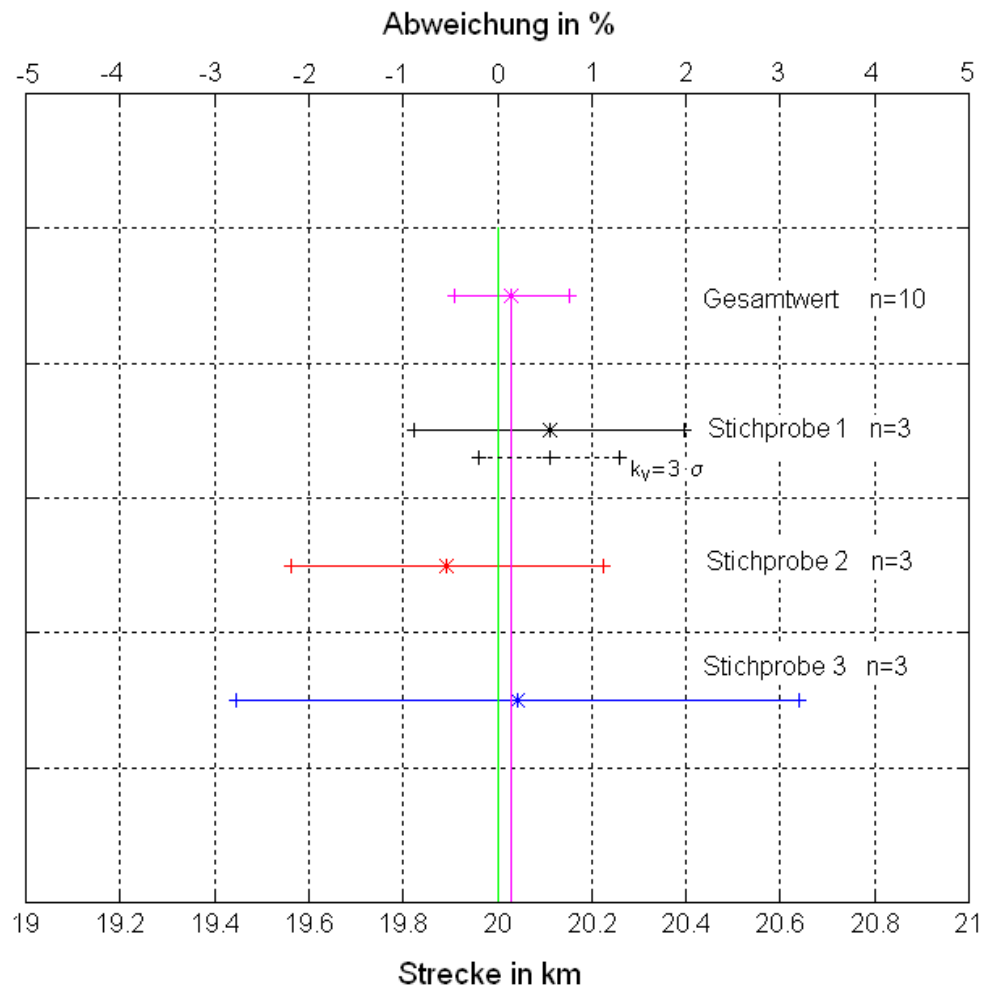
Beispiel: Mit einem Kurvimeter wird das UTM- Gitter einer Karte mäanderförmig abgefahren. So werden 10 Messwerte einer genau bekannten 20km Strecke gewonnen. Neben Mittelwert und Streuung aller Werte werden jeweils Stichproben aus dem Anfang, der Mitte und dem Ende der Werteliste entnommen und aus jeweils 3 Messwerten Mittelwert und Streuung berechnet (Tabelle 4).

**Tabelle 4** Testmessung einer 20,000km langen Strecke

M		$\bar{M}$	$s_{n-1}$	VB		$\bar{M}$	$s_{n-1}$	VB
20,16	Stichprobe 1	20,11	0,05	0,286	Alle Werte	20,03	0,118	0,122
20,11								
20,06								
20,16	Stichprobe 2	19,89	0,058	0,331				
19,96								
19,86								
19,86	Stichprobe 3	20,04	0,104	0,596				
20,16								
20,01								
19,96								

Das Ergebnis ist in Bild 13 gezeichnet.

Daraus ist abzulesen: Der Mittelwert aller 10 Messungen weicht nur um 0,16% vom richtigen Wert ab. Dieser Fehler kann zufällig auftreten, kann aber auch von der Kalibrierung stammen. Die Abweichung des Mittelwertes der drei Stichproben ist größer und beträgt etwa 0,5 %.



**Bild 11** Vertrauensbereiche einer Testmessung

Alle Mittelwerte befinden sich innerhalb des Vertrauensbereiches auch der anderen Stichproben, man kann darauf vertrauen, dass der Mittelwert irgendeiner anderen Stichprobe innerhalb dieses Bereiches liegt.

Damit wird auch bei 3 Messwerten ein ausreichend genaues Messergebnis erzielt. Mit 2 Messwerten und ähnlicher Standardabweichung würde der Vertrauensbereich um den Faktor 7,9 größer und damit ist die Anzahl von Messungen zu klein. Andererseits darf man nicht mit dem Faktor 3 rechnen, wie es bei einer großen Messwertanzahl möglich ist (dann liegen 99,7% aller Einzelmesswerte innerhalb des Bereiches von  $3s$ ). Wie man im Bild 13 ablesen kann, bleibt der Mittelwert der 3 Messwerte von Stichprobe 2 außerhalb des  $3s$ - Bereiches!

**Wichtig:** Vor der Auswertung wurden die Messwerte mit dem Faktor  $k_s = 0,969$  des Kurvimeters korrigiert. Ohne diese Korrektur wären die Ergebnisse um 3% nach größeren Werten verschoben gewesen - und der wahre Messwert von 20,00 km läge außerhalb des Vertrauensbereiches der Messungen!

### 3.8 Maximalwert und normale Genauigkeit

Für Maximalwerte muss man ein hohes Vertrauensniveau nutzen, z.B. 99,9%. Bei normaler Genauigkeit wählt man ein Vertrauensniveau von 95%, z.B. bei technischen Messungen, bei der Angabe der Toleranzen von Stahllinealen oder Bandmaßen. Bei Wanderstrecken ist ein maximaler Vertrauensbereich von 5% gefordert bei einem Vertrauensniveau von 99%. Bei 3 Messungen muss deshalb die Standardabweichung kleiner als  $s = 0,87\%$  sein.

Dagegen darf bei einem Vertrauensbereich von 3% mit dem normalen Vertrauensniveau von 95% die maximale Standardabweichung wegen  $k_v = 2,48$  höchstens  $s_{n-1} = 1,21$  sein, Damit ist die Forderung 3% Vertrauensbereich leichter zu erfüllen als 5% maximaler Vertrauensbereich. Dies gilt bei 3 Messungen, oberhalb 5 Messungen kehrt sich das Verhältnis um. Deshalb gilt, bei 3 Messungen ist die Forderung, dass der Vertrauensbereich einen Maximalwert von 5% nicht überschreitet, schärfer als bei 3%.

#### 4. Zusammenfassung

Die Messungen der Streckenlänge für das sportliche Wandern sollten mit einer Genauigkeit von etwa 1% erfolgen. Dementsprechend sind Messgeräte und Messverfahren auszuwählen. Messgeräte sind an einer auf 0,1% genauen Strecke zu kalibrieren. Bei GPS-Handgeräten, die nur über die Trackverfolgung verfügen, ist eine Kalibrierung nicht möglich. Sie sind deshalb für Streckenmessungen nicht verwendbar. Eine große Anzahl angezeigter Stellen garantiert keine hohe Genauigkeit!

Das Messergebnis ist mit dem durch Kalibrierung ermittelten Korrekturfaktor  $k_s$  zu berichtigen. Bei Wanderungen im steilen Mittelgebirge kann wegen der vielen Steigungen die Streckenlänge um 0,3% erhöht werden.

Bei Messungen auf der Karte ist auf Grund der Generalisierung insbesondere unterhalb eines Maßstabes 1:10 000 (d.h. Maßstabszahl > 10 000) das Ergebnis mit dem Korrekturfaktor  $k_G$  (siehe Tabelle 1) zu multiplizieren.

Da bei mehrfachen Messungen der gleichen Strecke die Ergebnisse differieren, sind zur Ermittlung der Streckenlänge mindestens 3 Messungen erforderlich. Aus diesen Werten sind der Mittelwert und die Standardabweichung zu berechnen. Den Vertrauensbereich der Messung erhält man durch Multiplikation der Standardabweichung mit dem Korrekturfaktor  $k_v$  (bei 3 Messungen ist  $k_v = 5,7$ , siehe Tabelle 2). Bezogen auf die Gesamtstrecke und mit 100% multipliziert, erhält man den Vertrauensbereich in Prozent. Dieser Wert darf nicht größer sein als 5%.

Da Messungen im Gelände sehr aufwendig sind, wird empfohlen, die Vorplanungen mit einem Kurvimeter auf einer Karte im Maßstab 1: 25 000 oder größer durchzuführen. Die genaue Messung der Strecke sollte mit digitalen Karten erfolgen. Der Maßstab sollte > 1:10 000 (Maßstabszahl < 10 000) sein. Besonders eignet sich die Milermeter genannte Karte (unter [gmap-pedometer.com](http://gmap-pedometer.com) oder [milermeter.com](http://milermeter.com)), da bei dieser die Wegepunkte sehr großzügig gesetzt werden können, so dass auch eine mehrfache Messung zur Ermittlung der Streuung wenig Zeit erfordert.

#### 5. Literatur

- [1] DIN 1319-3: Grundlagen der Messtechnik. Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße, Messunsicherheit.
- [2] Sachs, L.: Statistische Methoden 2.Auflage 1972 Springer-Verlag Berlin
- [3] U.Brandt, K.J. Roth: Handbuch für den DLV-Streckenvermesser 4.Aufl. 2016
- [4] J. M. Zogg: GPS und GNSS, Grundlagen der Ortung und Navigation mit Satelliten

Dresden, den 28.03.2021

Erhard Seidel

## Anhang 1

### **Digitale Karten aus dem Internet**

**[www.geoportal.sachsen.de/cps/karte.html?showmap=true](http://www.geoportal.sachsen.de/cps/karte.html?showmap=true)**

Weitere unter [geoportal](#) des jeweiligen Landes

(Offizielle Karte, wenig komfortabel, zu Kalibrierzwecken geeignet)

**[gmap-pedometer.com](http://gmap-pedometer.com)**

**[milermeter.com](http://milermeter.com)**

[tiles.gmap-pedometer.com](http://tiles.gmap-pedometer.com)

[tiles.milermeter.com](http://tiles.milermeter.com)

(Komfortabel, automatische Streckenfindung und Handbetrieb möglich, genau))

[openstreetmap.de](http://openstreetmap.de)

Darunter [wanderreitkarte](#).

Auch direkt aufrufbar mit **[wanderreitkarte.de](http://wanderreitkarte.de)**

(Keine automatische Streckenfindung, deshalb in Kurven die Messpunkte auf  $\frac{1}{2}$  des Abstandes zwischen Wegmittellinie und Sehne setzen oder den Abstand verkürzen)

**[de.mapy.cz](http://de.mapy.cz)**

(Automatische Wegfindung im Aufbau)

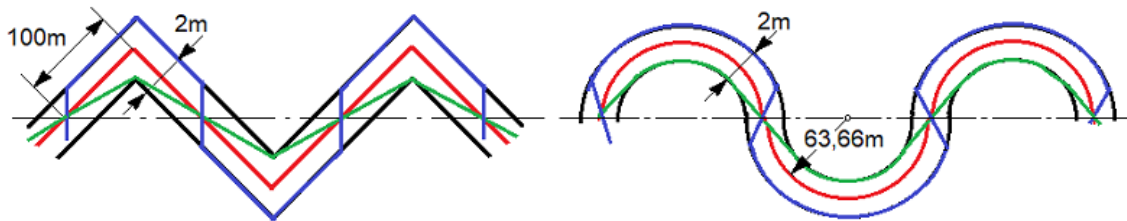
**[strecken-messen.de](http://strecken-messen.de)**

(Neues System, Automatische Wegfindung z.Z ungenauer als bei milermeter)

## Anhang 2 Berechnungsgrundlagen

### Wegwahl

Will man wissen, wie groß die Abweichung der Streckenlänge bei optimaler oder maximaler Wegwahl ist, kann man mit Kreisbögen oder Zickzackwegen modellieren. Die Berechnung der maximalen und minimalen Länge erfolgt mit der Zick-Zack-Führung mit 2x100m geraden Strecken und einer Strecke aus Halbbögen mit 200m Länge. Die Wegbreite ist 2m (Skizze unmaßstäblich).



Bei der Zick-Zack-Strecke ist die minimale Strecke (grün)

$$L_{\min} = 2 \cdot \sqrt{(99\text{m})^2 + (1\text{m})^2} = 198,01\text{m}$$

Die maximale Strecke (blau) ist

$$L_{\max} = 2 \cdot (100\text{m} + 1\text{m} \cdot \sqrt{2}) = 202,83\text{m}$$

lang, die mittlere Strecke (rot) ist 200m lang.

Für die Bogenstrecke berechnet man

$$L_{\min} = (63,66\text{m} - 1\text{m}) \cdot \pi + 0,1\text{m} = 196,96\text{m}$$

$$L_{\max} = (63,66\text{m} + 1\text{m}) \cdot \pi + 0,1\text{m} = 203,24\text{m}$$

Die Zuschläge von 0,1m ergeben sich aus dem Wechsel von der Innen- zur nächsten Innenseite bzw. von der Außen- zur nächsten Außenseite über eine Strecke von 20m. Die mittlere Länge (auch hier rot) ist ebenfalls 200m

Die maximale und die minimale Abweichung ist etwa 3m, also etwa 1,5 % gegenüber der mittleren Länge.

### Modellierung von Steigungen

Die Modellierung von Anstiegen, Bodenwellen oder Streckenabweichungen ist mit Dreiecken oder Kreisbögen möglich. Gegenüber der Ebene (s) wird sich der Weg verlängern.

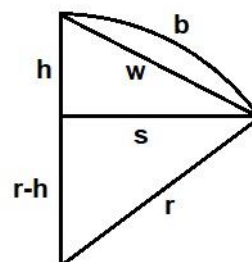
#### Dreieckmodellierung

Mit

s	Strecke
h	Höhe, Anstieg
w	Weglänge Hypotenuse

und Steigung  $st = \frac{h}{s}$

ist  $W = \sqrt{h^2 + s^2} = s \cdot \sqrt{st^2 + 1}$



## Modellierung mit Kreisbogen

Mit  $b$  Bogenlänge  
 $\alpha$  Winkel des Bogens  
 $r$  Radius des Bogens

ist  $b = r \cdot \alpha$        $\alpha = \arcsin \frac{s}{r}$       und mit

$$r^2 = s^2 + (r-h)^2 = s^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot h + h^2 \quad r^2 \text{ gekürzt und nach } r \text{ umgestellt}$$

$$\text{ist } r = \frac{s^2 + h^2}{2 \cdot h} = s \cdot \frac{(1 + st^2)}{2 \cdot st}$$

$$b = s \cdot \frac{(1 + st^2)}{2 \cdot st} \cdot \arcsin \frac{2st}{(1 + st^2)}$$

$$\text{Mit } F_{Dr} = \left( \frac{w}{s} - 1 \right) \cdot 100 \quad \text{und} \quad F_{Bog} = \left( \frac{b}{s} - 1 \right) \cdot 100$$

kann man mit einem Mathematikprogramm, z.B. GNU Octave, die Fehler als Funktion der Steigung berechnen.

### **Kartenfehler**

Zulässig ist bei topografischen Karten eine maximale Abweichung von 0,4mm für die Lage eines Objektes. Normiert entspricht das  $\sigma=3$ . Der Mittelwert der Abweichung wird für  $\sigma=1$ , d.h. 0,133mm geschätzt. Für eine Karte 1:25000 ist die mittlere Abweichung 3,33m.

Bei einer 25km-Wanderung mit 100 Stützpunkten auf der Karte ergibt das eine mittlere Abweichung von  $A = \sqrt{100 \cdot (3,333\text{m})^2} = 33,3\text{m}$

Das entspricht, bezogen auf 25km, einer Abweichung von 0,133%.

### **Ersatz von Kurven durch Geraden**

Bei der Messung der Streckenlänge mit dem Stechzirkel treten Fehler an Biegungen des Weges auf. Zur Abschätzung der Fehler wird ein n-Eck in einen Kreis eingezeichnet mit  $n=3 \dots 100$  und der Kreisumfang mit der Summe der Sehnenabschnitte verglichen.

Man erhält mit

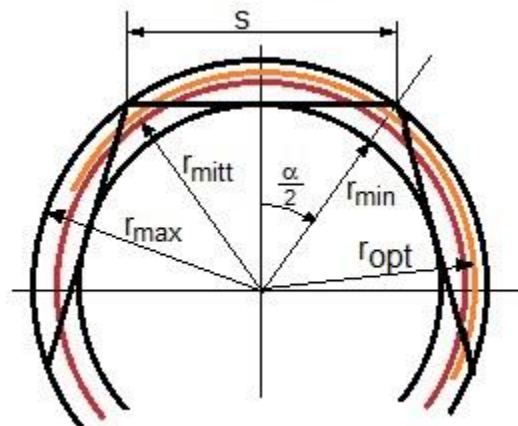
$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{n},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s/2}{r_{\max}} \rightarrow s = 2 \cdot r_{\max} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r_{\min}}{r_{\max}} \rightarrow r_{\min} = r_{\max} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$r_{\text{mitt}} = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

$$r_{\text{opt}} = \frac{2 \cdot r_{\min} + r_{\max}}{3}$$



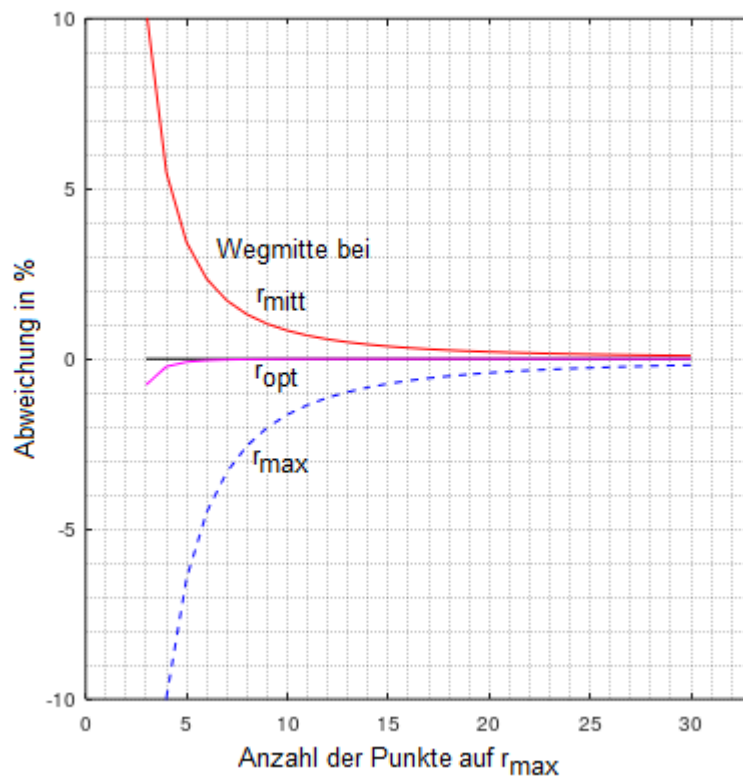
Die Kreisumfänge sind dann

$$U_{\min} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\min}, \quad U_{\text{mitt}} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{mitt}}, \quad U_{\text{opt}} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{opt}}, \quad U_{\max} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\max}$$

und für das n-Eck

$$U_{n\text{-Eck}} = n \cdot s$$

Vergleicht man die Länge der Kreise (als Mittellinie des Weges) mit der Messung mit dem Stechzirkel, ergeben sich folgende Abweichungen (Siehe Bild):



Weg mit maximalem Radius: Die mit dem Stechzirkel gemessene Strecke ist zu kurz.  
 Weg mit optimalem Radius: Die Abweichung liegt weit unter 1%.  
 Weg mit mittlerem Radius: Die gemessene Strecke ist zu groß.

Für die praktische Handhabung ist es besser, anstelle der Radien den maximalen Abstand  $a$  zwischen der Wegmitte und der Sehne zwischen den Einstechpunkten zu wählen. Für ein optimales Ergebnis ist dann der Abstand Spitze-Wegmitte  $a/2$ .



### Anhang 3 **Ermittlung der Standardabweichung**

Die Berechnung der Standardabweichung aus mehreren Messwerten kann mit wissenschaftlichen Taschenrechnern mit Statistikteil, Rechnern im Internet oder mit den Rechnern im Betriebssystem, z.B. Windows 7, erfolgen.

Zur Erprobung kann eine einfache Zahlenfolge genutzt werden:

Die gemessenen Strecken sollen 9, 10, 10, 11 km sein. Die Anzahl ist  $n=4$ , der Mittelwert ist  $\bar{m}=10$ , die Standardabweichung für Stichproben

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(9-10)^2 + 2 \cdot (10-10)^2 + (11-10)^2}{4-1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8164966$$

Den Vertrauensbereich erhält man mit  $k_v=2,91$  zu 2,376

#### **Taschenrechner**

Die Statistiktasten bei Taschenrechnern zur Ausgabe der Standardabweichung werden meist mit  $\sigma$  bezeichnet.

Ältere Taschenrechner haben oft Tasten mit  $\sigma_{n-1}$  und  $\sigma_n$  oder  $(\sigma_n)^2$ . Mit der Taste  $\sigma_{n-1}$  erhält man sofort den richtigen Wert.

Ist nur die Taste  $\sigma$  vorhanden und ist das Ergebnis des Beispiels  $\sigma_n=0,7071068$ , dann ist das Ergebnis zu korrigieren mit der Wurzel aus  $n/(n-1)$ :

$$s_{n-1} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad \text{im Beispiel also } s_{n-1} = 0,7071068 \cdot \sqrt{\frac{4}{4-1}} = 0,8164966$$

#### **Rechner im Internet**

Im Internet kann man verschiedene Statistikrechner finden. Ein günstiger Rechner ist z.B.:

[www.zinsen-berechnen.de](http://www.zinsen-berechnen.de)

Man wählt den Statistikrechner aus, gibt die Werte ein und erhält neben anderen Größen das gewünschte Ergebnis.

#### **Rechner mit Windows 10**

Statistikrechner sind unter Windows 10 zurzeit nicht mehr enthalten.

Für Windows 10 kann man den älteren Windows 7/8 - Statistikrechner kostenlos herunterladen. Anbieter für das kostenlose Programm findet man im Internet unter dem Begriff

Old Calculator for Windows 10

Andere kostenlose Rechner, z.B. Kalkules, berechnen meist nur  $\sigma_n$

#### **Streckenrechner des SWBV**

Ein einfaches Rechenprogramm, das aus den Messwerten der Strecke den Mittelwert, die Standardabweichung und den Vertrauensbereich berechnet, kann über die Geschäftsstelle des SWBV bezogen werden.

Auch andere Geräte, Smartphones usw. mit entsprechenden Apps ermöglichen solche Berechnungen.